II Кръг на състезание по математика, посветено

на

35 години Езикова гимназия „Акад. Людмил Стоянов" – Благоевград

Регламент

- Право на участие имат само ученици на Езикова гимназия „Акад. Людмил Стоянов" – Благоевград;

- Задачите се решават самостоятелно и се предават за проверка на преподавателите по математика в срок до 14 февруари 2019 г;

- всяка задача се оценява с 5 точки;

- необходимо е пълно и обосновано решение на задачите.

VIII клас

1 задача

Решете уравненията:

а) $x^2 + 2x + 7$=$(x^2 + 2x + 3)(4 + x^2 + 2x)$

б) $(x - 4)(x - 5)(x - 6)(x - 7) = 1680$

2 Задача

Решете уравнението $x^4 - 2(m + 2)x^2 + 4m + 4 = 0$ и определете за кои стойности на реалния параметър m има четири различни реални корена.

3 Задача

По случай завършването на лятната школа по математика участниците си разменили поздравления по електронна поща, като всеки е поздравил всеки един от останалите. Намерете броя на участниците, ако поздравленията са *1332*.

4 Задача

C диаметър страната AC на равностранния триъгълник ABC е построена окръжност k с център *т.*O, която пресича AB и BC съответно в точки M и N. Докажете, че:

а) MP е средна отсечка в триъгълник ABC и намерете дължината ѝ, ако дължината на страната на дадения триъгълник е решение на уравнението

$$x^2 - 6x - 16 = 0 \,;$$

б) триъгълник MPO е равностранен;

в) дъгите AM, MP, и PC са равни.

IX клас

1 задача

При коя стойност на параметъра a системата $\begin{vmatrix}(a+3)x+(a+2)y=2a+1\\(a+8)x+(a+6)y=2a+6\end{vmatrix}$ е неопределена?

2 задача

Ученик загубил някаква сума пари, която му била дадена за покупка на чанта, писалка и тетрадка. Ако чантата, писалката и тетрадката бяха съответно 5 пъти, 2 пъти и 2,5 пъти по – евтини, цялата покупка щеше да струва 8 лв. Ако пък същите предмети са съответно 2 пъти, 4 пъти и 3 пъти по-евтини, покупката ще струва общо 12 лв. Да се намери каква сума е загубил ученикът. Кое е по-евтино – чантата или писалката?

3 задача

Дадени са в равнината n прави, всеки две от които се пресичат и никои три не минават през една точка. Да се докаже, че те разделят равнината на $P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ части.

4 задача

За коя стойност на реалния параметър a най-голямата стойност на функцията $f(x) = 2ax^2 + 4x - a$ е 3?

X клас

1 задача

Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението

$(x + 2x - a - 2 \quad)(x^2 - 2x - a) = 0$ има три решения.

2 задача

а) Да е реши системата уравнения:

$$\begin{vmatrix} y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} \\ x = y^2 - 3y + 1 \end{vmatrix};$$

б) Да се докаже, че в координатната равнина на решенията на системата съответстват три точки, които са върхове на триъгълник. Да се намери лицето на триъгълника.

3 задача

Да се опрости израза:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}-\left(\frac{a+\sqrt[4]{ax^3}}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{ax}}-\sqrt[4]{ax}\right):\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}\right)$$

4 задача

Даден е триъгълник *ABC* със страни *AC=5 см, BC=7 см* и радиус на описаната окръжност $R=\frac{7\sqrt{3}}{3}$. Да се намери страната *AB*.

XI клас

1 задача

Три числа a_1, a_2, a_3 , първото от които е $a_1=\frac{3^{3\log_3\sqrt{6}}+81^{\log_9 5}}{409}\left(5^{3\log_5\sqrt{6}}-7^{2\log_7 5}\right)-\log_2\frac{1}{8}$, образуват аритметична прогресия. Ако към второто добавим по-малкия корен на уравнението $2^{x^2-x-6}-2^{x^2-x-9}=56$, ще се получат три числа, които образуват геометрична прогресия. Намерете числата a_1, a_2, a_3.

2 Задача

В ΔABC със страни AC=21см, AB=14см са построени ъглополовяща AL $(L\in BC)$ и медиана CM $(M\in AB)$. През точката L е построена права t, успоредна на CM, която пресича AB в точка P. Ако лицето на ΔLBP е 20 см^2, намерете лицето на ΔABC .

3 Задача

Даден е ΔABC със страни AB=21см, BC=10см и CA=17см. Намерете:

а) лицето на триъгълника;

б) разстоянието от медицентъра на триъгълника до най-голямата му страна;

в) лицата на частите, на които се разделя дадения триъгълник от ъглополовящата на $\angle ABC$.

4 задача

В ромб с дължини на диагоналите a и $a\sqrt{3}$ е вписана окръжност. Да се намери лицето на четириъгълника с върхове допирните точки на окръжността със страните на ромба.

XII клас

1 задача

Крайна геометрична прогресия има четен брой членове. Сборът от членовете ѝ е 3 пъти по-голям от сбора на членовете ѝ с нечетни номера. Да се намери частното на геометричната прогресия.

2 задача

Дадена е правилна триъгълна пирамида с връх М и основа ΔАВС. Точка К лежи на височината МО, като МК:КО=1:2 и разстоянието от К до околен ръб е $\frac{4}{\sqrt{13}}$. Да се намери обемът на пирамидата, ако околните стени сключват с основата ъгъл 30^0.

3 задача

Да се определи видът на триъгълник, ако за ъглите му α, β и γ е изпълнено:

$$\cos\alpha + \cos\beta = \sin\gamma.$$

4 задача

В окръжност с радиус 1 е вписан изпъкнал четириъгълник ABCD, като $\sphericalangle CAD = 30^0$ и $\sphericalangle ACB = 60^0$.

а) Да се докаже, че $S_{ABCD} = 2\sin(\alpha + 30^0).\sin(\alpha + 60^0)$, където $\alpha = \sphericalangle$BAC.

б) За коя стойност на α лицето на четириъгълника е най-голямо?